1 ***Zufallsexperiment***	Ein ***Zufallsexperiment*** ist ein Versuchsaufbau mit „zufälligem“ Ausgang, d. h. das Ergebnis kann nicht vorhergesagt werden.
2 ***Ergebnis*** (auch ***Ausgang***)	Bei der Durchführung eines Zufallsexperimentes tritt jeweils genau ein ***Ergebnis*** ein. ***Achtung:*** ***Ergebnis*** nicht mit ***Ereignis*** verwechseln!
3 ***Ergebnismenge***	Alle möglichen Ergebnisse eines Zufalls-experiments fasst man in der ***Ergebnis-menge*** S zusammen (auch Ω griech. Omega). ***Beispiel:*** • Beim Würfel sind die Augen 1 bis 6 möglich $\rightarrow$ $S=\{1;2;3;...6\}$ • Beim zweimaligen Würfeln spielt auch die Reihenfolge eine Rolle. $S=\{(1;1),(1;2),...(1;6),(2,1),...(2,6),...,(6;6)\}$
4 ***Ereignis*** / ***Gegenereignis***	Ein ***Ereignis*** ist eine Teilmenge der Ergebnis-menge. Ereignisse werden mit großen Buchsta-ben *A*, *B*, ... dargestellt. Die Menge mit den Elementen, die nicht in einem Ereignis *A* enthalten sind, heißt ***Gegen-ereignis*** $\overline{A}$ ***Beispiel:*** • *A* = Summe der Augenzahlen beim zweimaligen Würfeln ungerade. $A\subset S$ mit $A=\{(1;2),(1;4),...(1;6),(2,1),...(2,5),...,(6;5)\}$ $\overline{A}=\{(1;1),...(1;5),(2,2),...(2,6),...,(6;6)\}$

5 ***Elementarereignis*** ***sicheres Ereignis*** ***unmögliches Ereignis***	Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge S. Drei besondere Teilmengen erhalten einen Namen: Jede Teilmenge der Ergebnismenge mit genau einem Element (Ergebnis) ist ein ***Elementar-ereignis***. Da auch die Ergebnismenge eine Teilmenge von sich selbst ist, ist auch diese ein Ereignis – das ***sichere Ereignis***. Auch die leere Menge ist eine Teilmenge von S, man nennt sie ***unmögliches Ereignis***.

6 ***Absolute*** und ***relative Häufigkeit***	Die ***absoluten Häufigkeit*** beschreibt die Anzahl der Fälle, in denen ein Ergebnis bei einem mehr-fach ausgeführten Zufallsexperiment eintritt. Bei der ***relativen Häufigkeit*** teilt man die abso-lute Häufigkeit durch die Anzahl aller Durchführ-ungen. • Die relative Häufigkeit ist stets eine Zahl zwischen 0 und 1 (oft in Prozentschreibweise ausgedrückt). • Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse ist stets 1.

7 ***Empirisches Gesetz der großen Zahlen***	Das ***empirische Gesetz der großen Zahlen*** besagt, dass sich die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses in der Regel der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses annähern, wenn das Zufalls-experiment sehr, sehr häufig durchge-führt wird. Damit lassen sich Wahrscheinlichkeiten zu Zufallsexperimenten bestimmen.

8 ***Wahrscheinlichkeit***	***Wahrscheinlichkeiten*** zwischen 0 und 1 sind Zahlen, die ein Maß für die „Erwartung“ ausdrücken, mit denen ein Ereignis zu einem Zufallsexperiment eintritt. Die Wahrscheinlichkeit 0 beschreibt hierbei, dass das beschriebene Ereigniss unmöglich eintritt. Die Wahrscheinlichkeit 1 besagt, dass das entsprechende Ereignis sicher eintritt (mit 100%iger Wahrscheinlichkeit).

9 **_Wahrscheinlichkeitsfunktion P_**	Die **_Wahrscheinlichkeitsfunktion P_** ist eine Funktion, die jedem Ereignis eines Zufallsexperiments eine Zahl zwischen 0 und 1 (meist in Prozent) zuweist. Dabei müssen folgende Forderungen erfüllt sein: 1) Für jedes Elementarereignis $\{e_j\}$ ist $0 \leq P(\{e_j\}) \leq 1$ 2) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1.
10 **_Wahrscheinlichkeitsverteilung_**	Stellt man die Elementarereignisse in einer Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dar, so spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gleich, spricht man von einer **_Laplace-Verteilung_**.
11 Wie bestimmt man Wahrscheinlichkeiten?	1) **_Empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung:_** Aufgrund des empirschen Gesetztes der großen Zahlen entsprechen die relativen Häufigkeiten bei vielen Durchführungen in guter Nährung den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. 2) Z. B. durch geometrische Überlegungen lassen sich Situationen **_modellieren_**. Hierdurch können wir Wahrscheinlichkeiten direkt festlegen. (Münzwurf, Würfel, Glücksrad, Lotto)
12 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsfunktion	1) Für jedes Ereignis $A \subset S$ ist $0 \leq P(A) \leq 1$ 2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 3) $P(\{\ \}) = 0$ 4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (**_Additionssatz_**) 5) A, B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (**_Spezieller Multiplikationssatz_**)

13 **Mehrstufige Zufallsexperimente**	Manche Zufallsexperimente lassen sich (zumindest gedanklich) in mehrere Teilexperimente zerlegen. Man spricht dann von ***mehrstufigen Zufallsexperimenten***. ***Beispiele:*** 1) Wiederholtes Würfeln 2) Ziehen von mehreren Kugeln aus einer Urne. 3) Bernoulli-Ketten

14 ***Pfadregeln***	Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich (bis zu einer gewissen Größe) mit Hilfe eines Baumdiagramms veranschaulichen. Hierbei gilt: 1) Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ergibt sich durch Multiplikation der Teilwahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades. 2) Die Wahrscheinlichkeit mehrerer Pfade bestimmt man durch Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten.

15 ***Laplace-Experiment*** und ***Laplace-Formel***	Bei einem ***Laplace-Experiment*** ist jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich. Damit lassen sich Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis A leicht bestimmen: $\boxed{P(A)=\frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$ ***Beispiel:*** • Werfen eines idealen Würfels, wobei für $A=\{1;2\}$ gilt: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

16 ***Vierfeldertafel***	Mit Hilfe einer Vierfeldertafel stellt man bei unabhängigen Ereignissen die absoluten (oder rel.) Häufigkeiten von zwei Ereignissen und ihren Gegenereignissen dar. Hieraus lassen sich leicht die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bestimmen. ***Beispiel:*** $P(A\cap B)=\frac{145}{338}$

	Ereignis A	$\overline{A}$	gesamt
Ereignis B	145	55	200
$\overline{B}$	38	100	138
gesamt	183	155	**338**

17

Bernoulli-Experiment

Ein Bernoulli-Experiment ist eine Zufallsexperiment mit genau zwei verschiedenen Ergebnissen.

(Die Ergebnismenge besitzt nur zwei Elemente. Man bezeichnet sie oft mit „***Treffer***“ und „***Niete***“.)

Beispiele:

- Münzwurf (Kopf oder Zahl)
- Würfeln („6“ oder „keine 6“)
- Geburt eines Kindes (Junge oder Mädchen)
- russisches Roulette

18

Fakultät

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ (sprich: „n-Fakultät“)

($n!=$ Produkt der ersten n aufeinander folgenden, positiven, natürl. Zahlen.)

Anwendung:

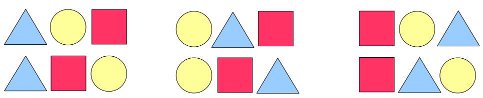
- Bei 10 unterscheidbaren Gegenständen gibt es genau 10! verschiedene Möglichkeiten diese in einer Reihe anzuordnen.

19

Permutation

Unter einer ***Permutation*** einer Menge versteht man die Veränderung der Anordnung einer Menge durch Vertauschen ihrer Elemente.

- n verschiedene Elemente lassen sich auf genau $n!$ verschiedene Arten anordnen.



So liefern z. B. 3 Elemente $3!=3 \cdot 2 \cdot 1=6$ Permutationen.

20

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k}$ ist die k-te Zahl in der n-ten Reihe im Pascalschen Dreieck, wobei man beim Abzählen jeweils mit der nullten Zahl/Reihe beginnt.

Formel: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (TR: nCr-Taste)

- →siehe Formel von Bernoulli,
- →siehe Koeffizienten bei Binomen $(a+b)^n$
- Lotto: Es gibt $\binom{49}{6}$ verschiedene Tippmöglichkeiten bei „6 aus 49“.

21 **Bernoulli-Kette**	Wird ein Bernoulli-Experiment genau n mal durchgeführt, so spricht man von einer ***Bernoulli-Kette der Länge n***.
22 **Formel von Bernoulli**	Gegeben ist eine Bernoulli-Kette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p und der Länge n. Sucht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau k Treffer eintreten $(X=k)$, so gilt: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$
23 **Binomialverteilung $B_{n,p}$, binomialverteilte Zufallsvariable (Zufallsgröße)**	Kann eine Zufallsvariable X die Werte 0, 1, … n annehmen und gilt für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ dann heißt die Zufallsvariable X ***binomialverteilte Zufallsvariable***. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt ***Binomialverteilung $B_{n;p}$ mit den Parametern n und p***.
24 **$B_{n;p}(k)$**	Ist eine Zufallsvariable binomialverteilt mit den Paramentern n und p, so schreibt man für die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ oft $B_{n;p}(k)$. ***Hinweis:*** Diese Schreibweise erinnert an die Funktionsschreibweise $f(x)$. Analog zum Schaubild von $f(x)$ lässt sich $B_{n;p}(k)$ im Histogramm an der Stelle k ablesen.

25 Erwartungswert

Ist eine Zufallsvariable (-größe) *X* mit den Werten x_1 bis x_r gegeben, dann ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen fogendermaßen definiert:
$E(X)=x_1 \cdot P(X=x_1)+x_2 \cdot P(X=x_2)+...+x_r \cdot P(X=x_r)$
Oft schreibt man für $E(X)$ auch μ (sprich: „mü“).

- Beschreibt *X* den Gewinn/Verlust, liefert μ einen Wert für den durchschn. Gewinn/Verlust auf „lange Sicht“. $\mu=0 \Leftrightarrow$ Spiel ist fair.
- Beschreibt *X* die Trefferzahl bei einer Bernoulli-Kette (*X* binomialverteilt), gilt $\mu=n \cdot p$ und liefert ein Maß für die „durchschn. Trefferzahl“.

26 Varianz

Ist eine Zufallsvariable (-größe) *X* mit den Werten x_1 bis x_r gegeben, versteht man unter der ***Varianz der Zufallsvariablen X*** den Ausdruck:
$V(X)=(x_1-\mu)^2 \cdot P(X=x_1)+...+(x_r-\mu)^2 \cdot P(X=x_r)$

Bemerkungen:

- Man schreibt für die Varianz auch $V(X)=\sigma^2$.
- Die Varianz ist (wie die Standardabweichung) ein Maß für die Streuung der Ergebnisse um den Mittelwert.
- Falls *X* binomialverteilt ist, gilt $\sigma^2=n \cdot p \cdot (1-p)$

27 Standardabweichung

Die Wurzel aus der Varianz einer Zufallsvariablen (-größe) *X* nennt man ***Standardabweichung von X***. Man bezeichnet sie mit $\boldsymbol{\sigma}$ (sprich: sigma).

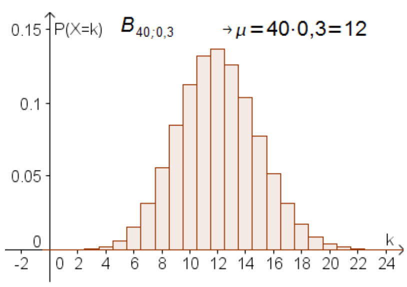
Bemerkungen:

- σ spielt eine große Rolle bei der Normalverteilung (zur „Anpassung“ der Gaußsche Glockenfunktion)
- Falls *X* einen Gewinn/Verlust darstellt, liefert σ im Gegensatz zu *V(X)* die Einheit €.
- Zum Rechnen ist *V(X)* besser geeignet (keine Wurzel).

28 Histogramm

Die „Balken“ im ***Histogramm*** beschreiben die Wahrscheinlichkeit mit der das Ereignis mit $X=k$ eintritt.

Bei einer binomialverteilten Zufallsvariablen wird das Maximum ungefähr bei μ angenommen.



29	

30	

31	

32	